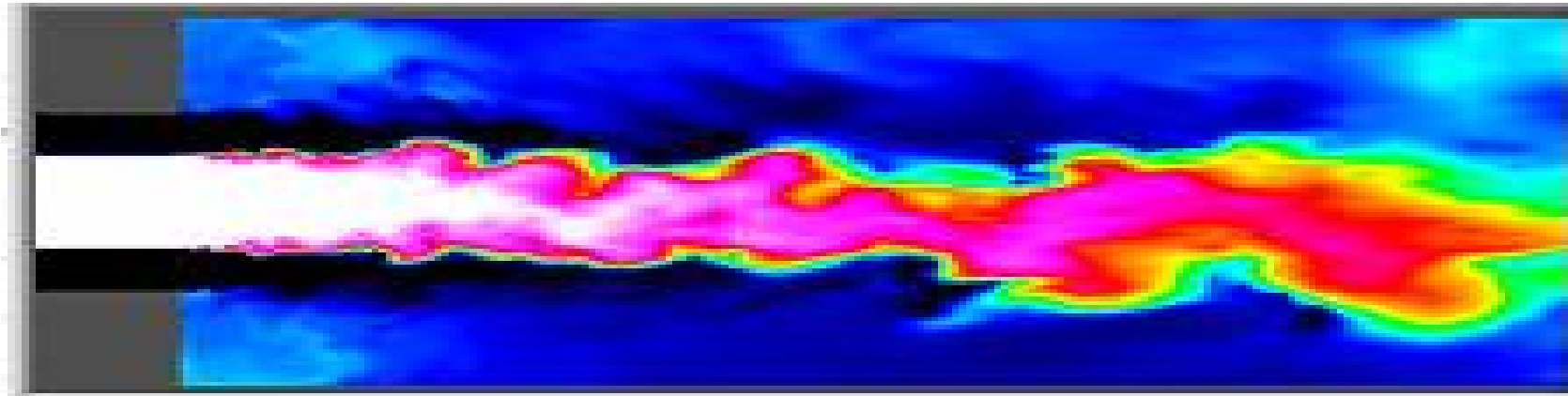


# Mekanika fluida

## Hidrodinamika



# Dinamika fluida

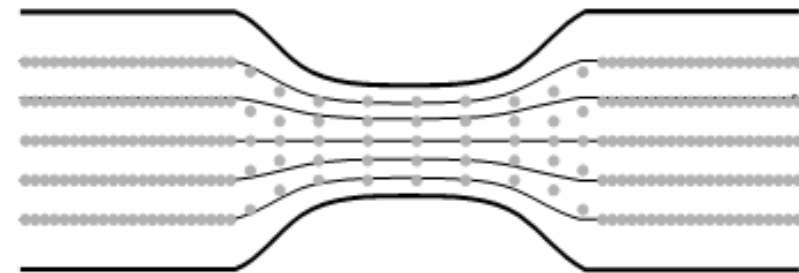
Kretanje fluida je znatno komplikovanije od kretanja čvrstog tela.

Kretanje fluida se naziva **strujanje fluida** = nastaje zbog težine fluida ili razlike pritiska

razmatramo strujanje:

- idealnih fluida,
- konstantne gustine,
- malim brzinama ( $v$  manje od 100 m/s)

Kretanje fluida se opisuje kretanjem njegovih čestica.



## FLUIDI

### Idealni

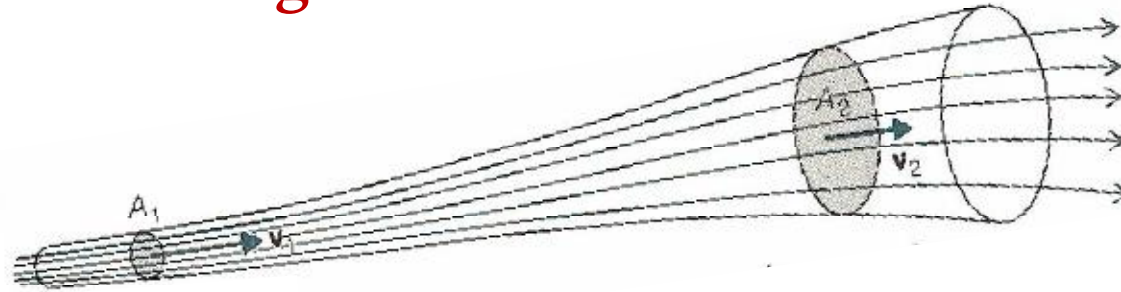
- nema unutrašnjeg trenja
- Zanemarena viskoznost*

### Realni

- pri kretanju postoji unutrašnje trenje kao posledica međumolekularnih sila.
- Viskoznost uzeta u obzir*

**Viskoznost** - posledica unutaršnjeg trenja među česticama fluida

## Strujanje idealnog fluida



**Strujne linije** – **strujnice** su zamišljene linije duž kojih se kreću čestice fluida.

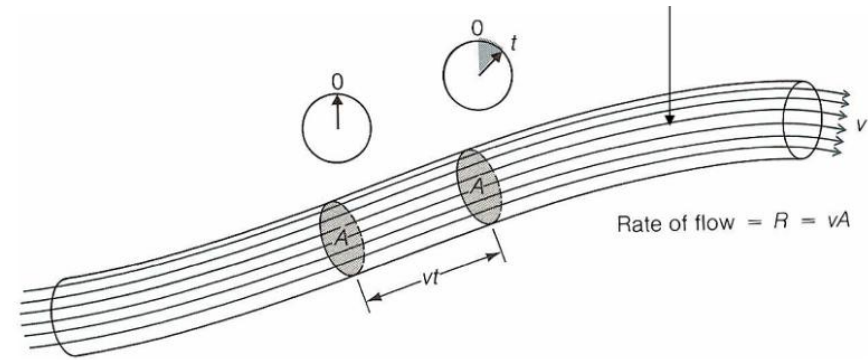
**Strujna cev** – deo fluida ograničen strujnicama.

**Stacionarno strujanje** – brzina i pritisak čestica u pojedinim tačkama prostora zavise samo od položaja, a ne od vremena, čestice se kreću duž strujnica .

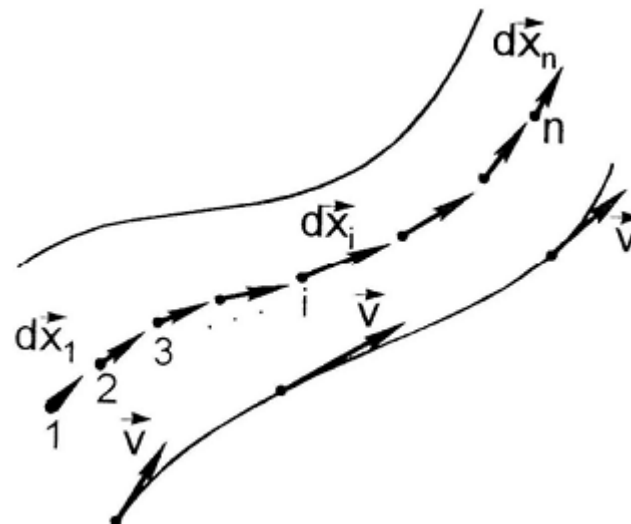
**Nestacionarno strujanje** – brzina i pritisak čestica se menjaju u zavisnosti od vremena



# Dinamika fluida

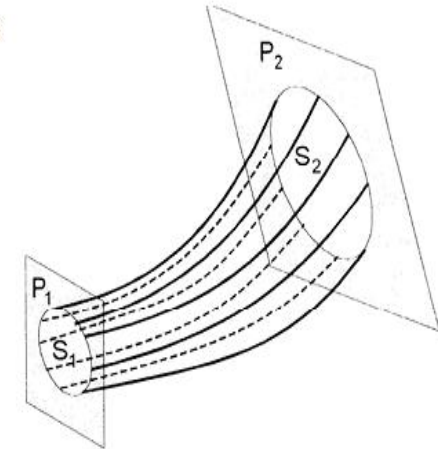


- **Laminarno kretanje** – najprostije stacionarno strujanje čije se strujnice ne seku (paralelne su i prave), brzina strujanja je nepromenljiva duž jedne iste strujnice.

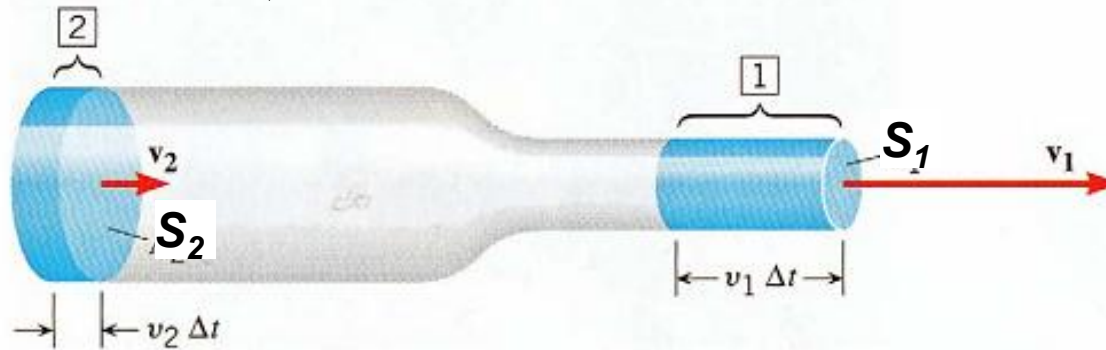


# Jednačina kontinuiteta.

- Zbog osobine nestišljivosti, zapremine proteklog fluida na dva različita preseka strujne cevi su jednake.



- strujna cijev u kojoj se presek  $S$  menja
- brzine  $v_1, v_2$  stalne



$$Q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S \Delta l}{\Delta t} = \frac{S v \Delta t}{\Delta t} = S v$$

$$Q = [\text{m}^3/\text{s}]$$

Zapreminski protok  
ili jačina strujanja  
fluida

$$S v = \text{const.}$$

$$V_1 = S_1 v_1 \Delta t$$

$$V_2 = S_2 v_2 \Delta t$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Zapremina valjka  
 $\Delta V = S \Delta l$

brzina  $v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$

← Jednačina kontinuiteta

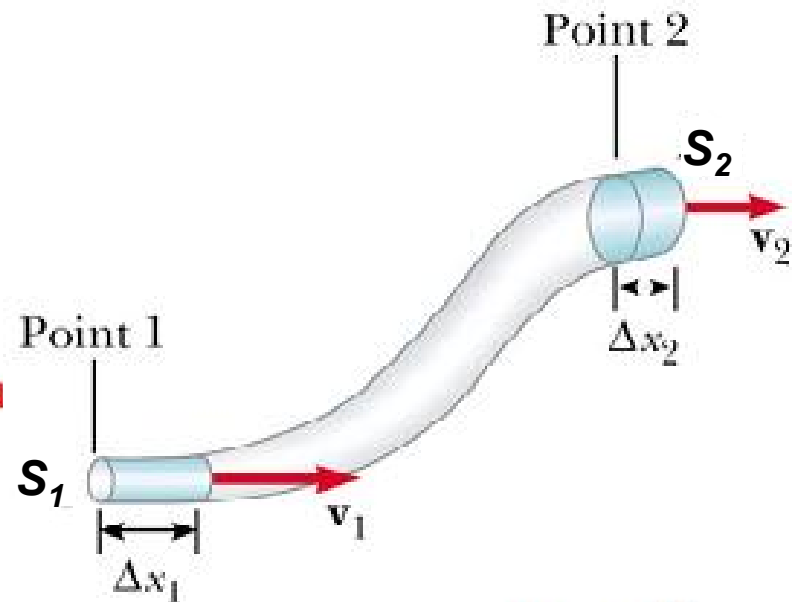
# Jednačina kontinuiteta.

- U opštem, tj. **realnom** slučaju, kada je fluid **stišljiv** (ima različitu zapreminu, pa tako i gustinu u različitim delovima strujne cevi), uzima se da je **maseni protok fluida** na dva različita preseka strujne cevi jednak (kolika masa fluida prođe kroz jedan poprečni presek strujne cevi, toliko masa mora proći u jedinici vremena i kroz bilo koji drugi poprečni presek).

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 S_1 v_1 \quad \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_2 S_2 v_2$$

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \Rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

$$\boxed{\rho S v = \text{const.}} \quad \leftarrow \text{Jednačina kontinuiteta}$$



## Protok fluida

Protok fluida je protekla količina (zapremina) fluida kroz strujnu cev u jedinici vremena:

$$Q = \frac{V}{t} = S v \quad Q_m = \frac{m}{t} = \frac{\rho V}{t} = \rho S v$$

# Bernulijeva jednačina

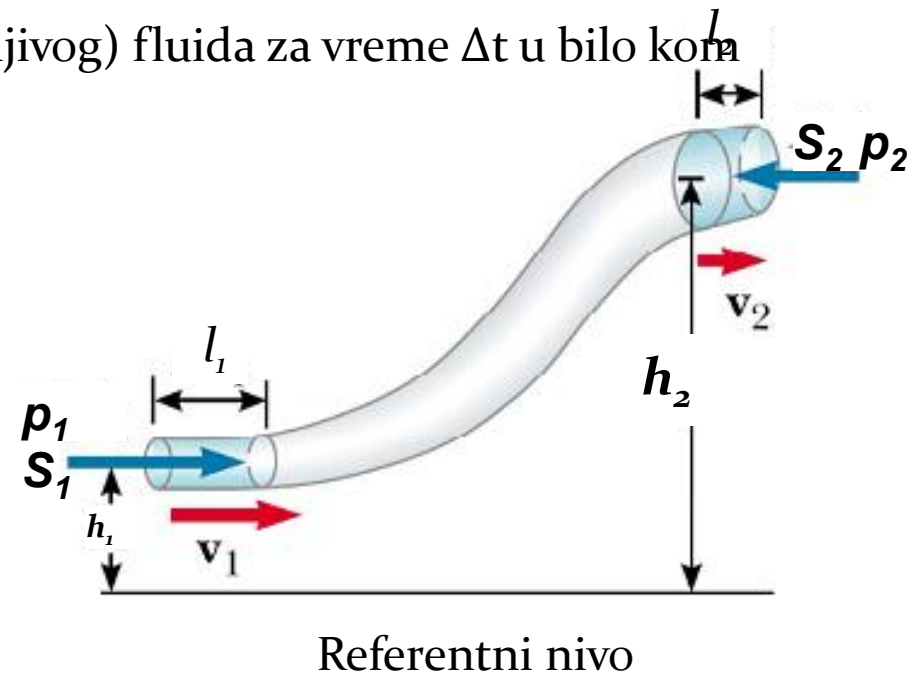
- Strujanje tečnosti (fluida) je posledica delovanja **spoljašnjih sila**.
- **Rad spoljašnjih sila** menja **kinetičku** i **potencijalnu energiju tečnosti**.
- Neka je  $\Delta m$  masa potisnutog (nestišljivog) fluida za vreme  $\Delta t$  u bilo kom preseku strujne cevi:

$$V_1 = V_2 = \frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$$

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

$$\Delta E_p = \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1$$

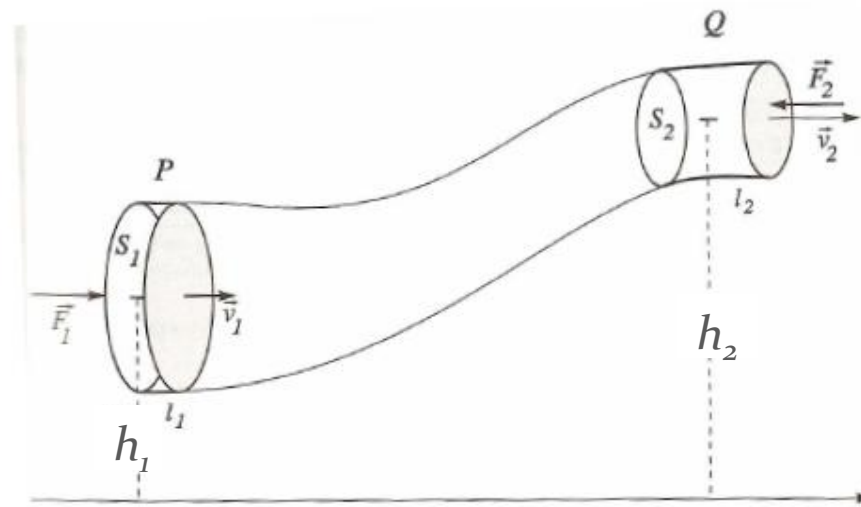


\*Danijel Bernuli (1700-1782), švajcarski fizičar i matematičar.



# Bernulijeva jednačina

stacionarno strujanje idealnog fluida  $\xrightarrow{\text{jedn. kontinuiteta}}$  protok jednak u presecima  $S_1$  i  $S_2$



Zapremina fluida  $\Delta V$  u vremenu  $\Delta t$

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho}$$

sile pritiska  $F = pS$  i rad sila pritiska  $A = Fs$

$$\Delta A_1 = F_1 \Delta s_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\Delta A_2 = -F_2 \Delta s_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t = -p_2 \frac{\Delta m}{\rho}$$

Ukupni rad  
+

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = (p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\rho}$$

$F_2$  se suprotstavlja delovanju  $p_1$  negativan rad, smer suprotan od kretanja fluida

Element puta na kojem deluje sila kad pomera fluid

$$\Delta s = v \Delta t$$



- Na osnovu zakona održanja energije, promena ukupne energije fluida  $\Delta E$  je jednaka radu spoljašnjih sila  $\Delta A$ :

U fluidu nema trenja pa:

$$\Delta A = \Delta E$$

Rad spoljašnjih sila

Promena energije, kinetičke i potencijalne

$$\Delta E = E_{k2} + E_{p2} - (E_{k1} + E_{p1})$$

$$\Delta E = (E_{k2} - E_{k1}) + (E_{p2} - E_{p1})$$

Uvrštavanjem  $E_k = \frac{mv^2}{2}$   $E_p = mgh$   $\rightarrow$   $\Delta E = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1$

Iz relacija  $\Delta A = \Delta E$  i  $\rho$  sledi:

$$(p_1 - p_2) \frac{\cancel{\Delta m}}{\rho} = \frac{\cancel{\Delta m} v_2^2}{2} - \frac{\cancel{\Delta m} v_1^2}{2} + \cancel{\Delta m} g h_2 - \cancel{\Delta m} g h_1$$

$$(p_1 - p_2) \frac{1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g h_2 - g h_1$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad \text{ili još kraće}$$

# BERNOULLI-JEVA JEDNAČINA

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = konst.$$

Statički pritisak  
zbog spoljašnjih sila

Hidrostatski pritisak  
zbog visinske razlike  
elementa fluida

Dinamički pritisak  
zbog kretanja fluida

Kod stacionarnog strujanja **nestišljivog** fluida  
zbir **statičkog**  $-p$ , **visinskog**  $-\rho g h$  i **dinamičkog**  $-\rho v^2/2$  pritiska  
duž strujne cevi je stalan.

- **Ili:** suma pritiska  $p$ , kinetičke energije po jedinici zapremine  $\rho v^2/2$  i potencijalne energije po jedinici zapremine  $\rho g h$  nestišljivog fluida ima konstantnu vrednost duž strujne cevi.

Venturijeva cev

1. slučaj: strujna cijev horizontalna

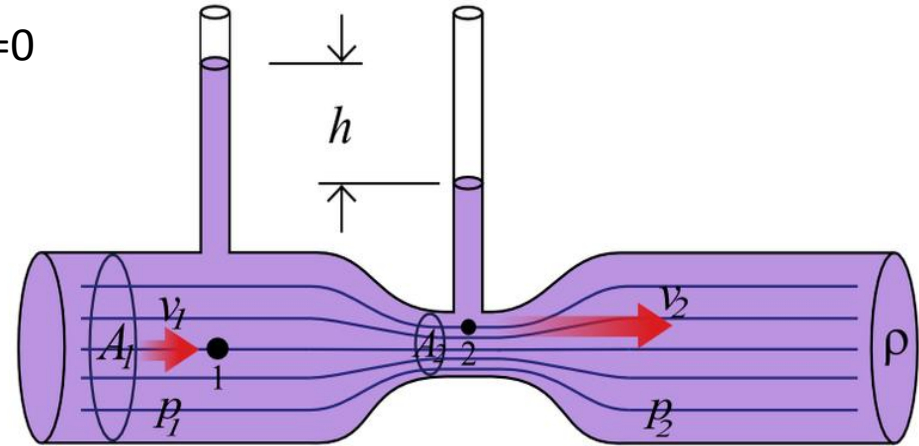
→  $h=0$

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = konst.$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

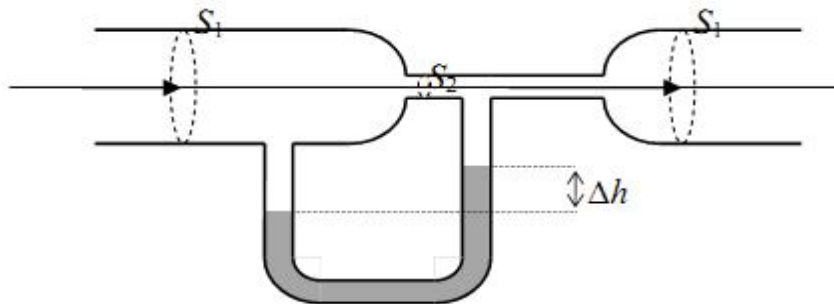
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}$$

povećanjem brzine strujanja, dinamički se pritisak povećava, a statički se smanji.



$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}$$



$$p_1 - p_2 = \rho_0 g \Delta h$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \rho_0 g \Delta h}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]}}$$

2. slučaj: kosa cev, fluid miruje

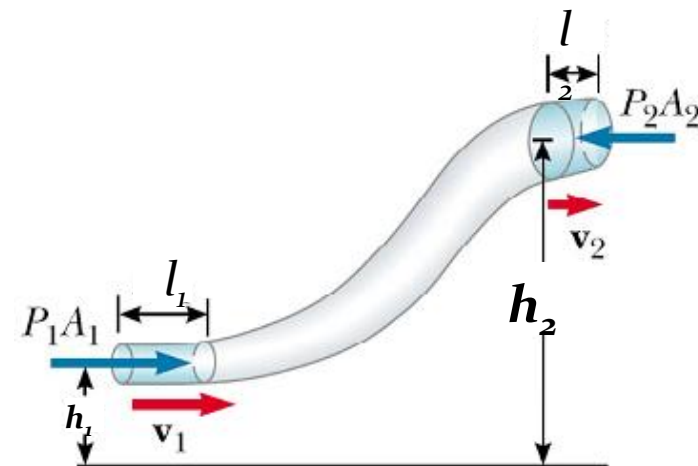
➔  $v=0$

$$p + \rho g h = konst.$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1)$$

$$\Delta p = \rho g (h_2 - h_1)$$

Hidrostatički pritisak  
zbog visinske razlike fluida



Referentni nivo

## Isticanje tečnosti kroz male otvore. Toričelijeva teorema.

$$p_1 = p_2 \equiv p_0$$

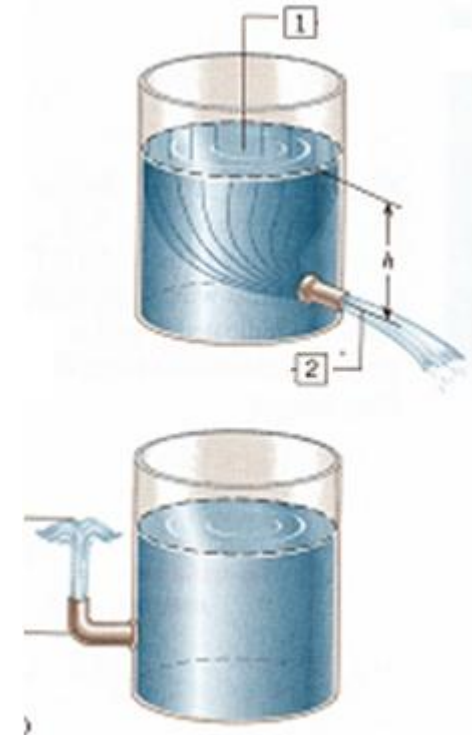
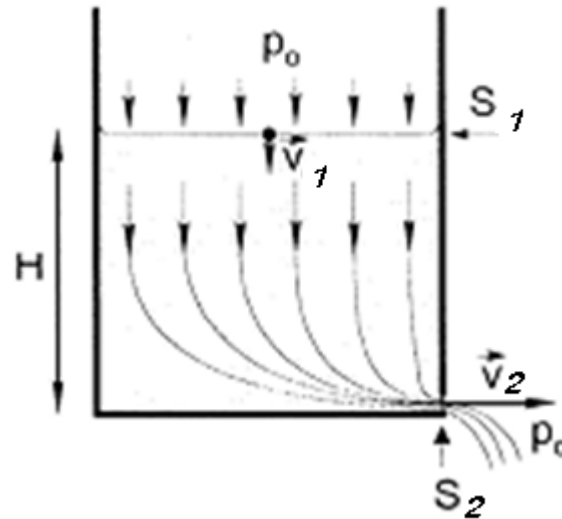
$$h_1 = H \quad h_2 = 0$$

$$v_2 \gg v_1 \quad v_1 \approx 0$$

$$v_2 \equiv v$$

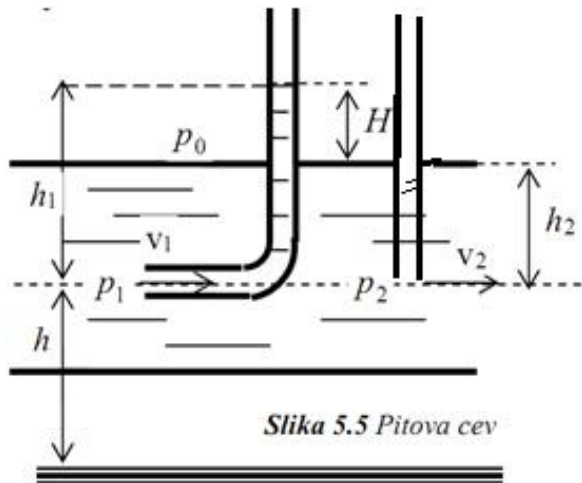
$$p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g H = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gH}$$



**Toričelijeva teorema:** brzina isticanja tečnosti iz širokog i otvorenog prema atmosferi suda kroz mali otvor, koji se nalazi na vertikalnom rastojanju H od nivoa slobodne površine, jednaka je brzini slobodnog pada tela sa iste visine.

- **Pitova cev** se koristi za merenje brzine protoka fluida. Primenom Bernulijene jednačine na mestu otvora cevi i daleko izvan nje na istoj visini u odnosu na referentni nivo dobijamo



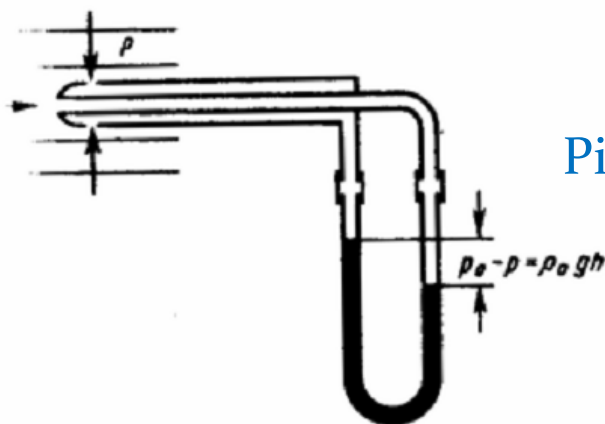
$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 + \rho g h.$$

Na otvoru cevi fluid miruje, odn.  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ . Statički apsolutni pritisci u datim tačkama prostora iznose

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1, \quad p_2 = p_0 + \rho g h_2.$$

dobijamo da je brzina protoka fluida na datom nivou ,  
gde je  $H = h_1 - h_2$

$$\mathbf{v}_2 = \sqrt{2gH}$$



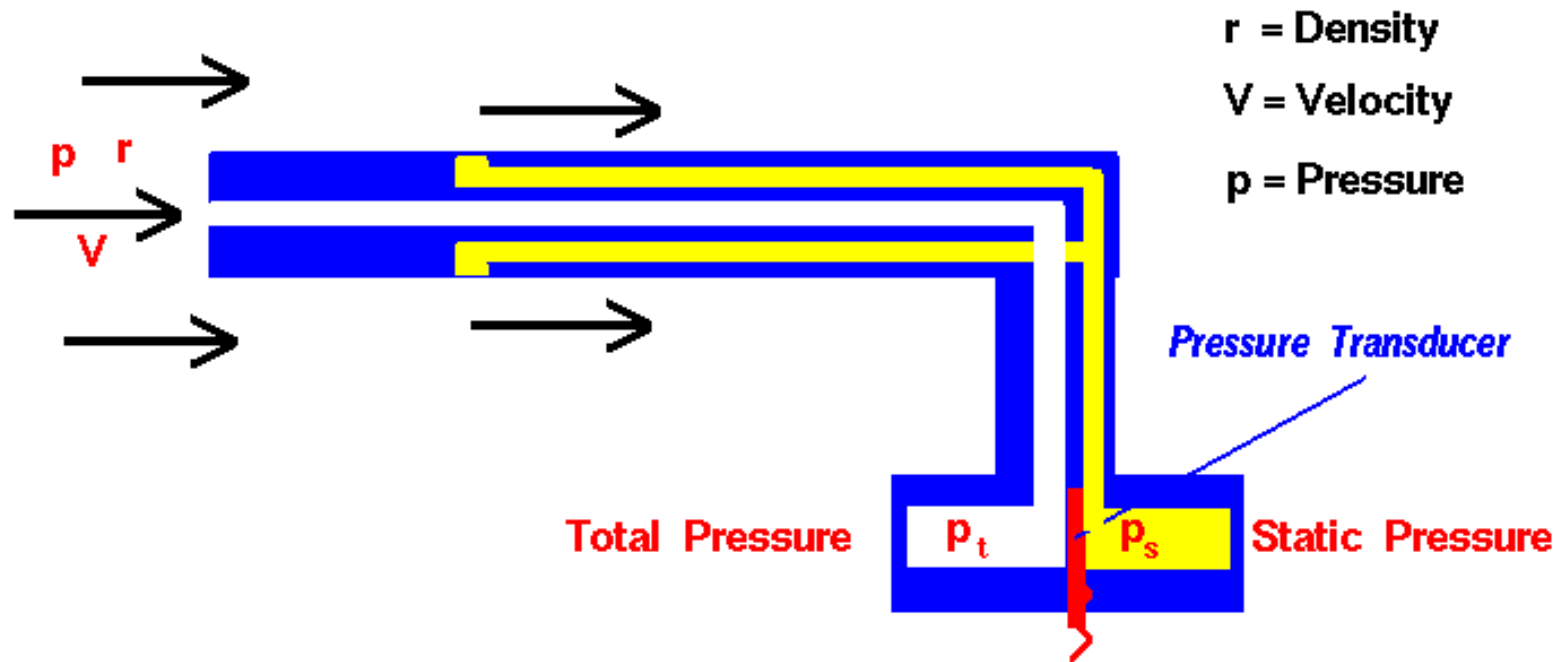
Pitot- Prandtlova cev.

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_0 g h}{\rho}}.$$



# Pitot-Static Tube Prandtl Tube

Glenn  
Research  
Center



*Bernoulli's Equation:*

static pressure + dynamic pressure = total pressure

$$\left( p_s + r \times \frac{V^2}{2} \right) = p_t$$

*Solve for Velocity:*

$$V^2 = \frac{2(p_t - p_s)}{r}$$

Measure difference in total and static pressure



**PODpritisak i NADpritisak** - manji ili veći pritisak od atmosferskog  $p_a$

$$p = p_a + \Delta p$$

$$\Delta p = p - p_a$$

**Podpritisak** - smanjenje pritiska ( $\Delta p < 0$ ) pri većim brzinama protjecanja fluida

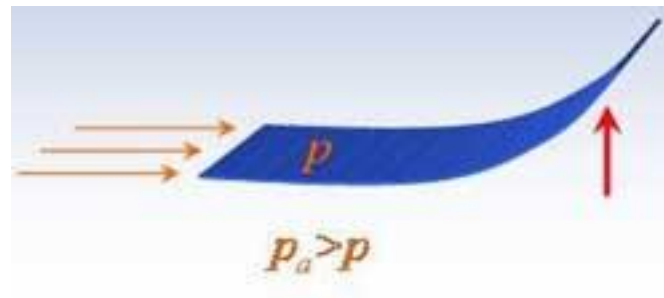
**Nadpritisak** - povećanje pritiska ( $\Delta p > 0$ )

Kako leti avion ?

List papira



Smer duvanjaa

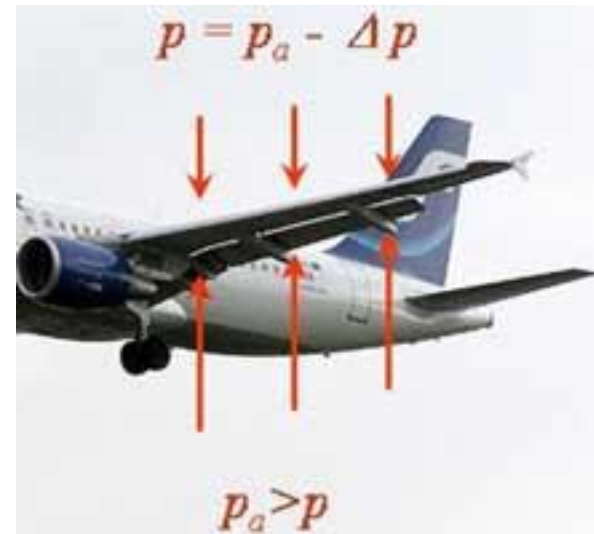


Tamo gdje je brzina strujanja veća, pritisak je manji (Bernoullijeva jedn.)

## Zašto leti avion ?



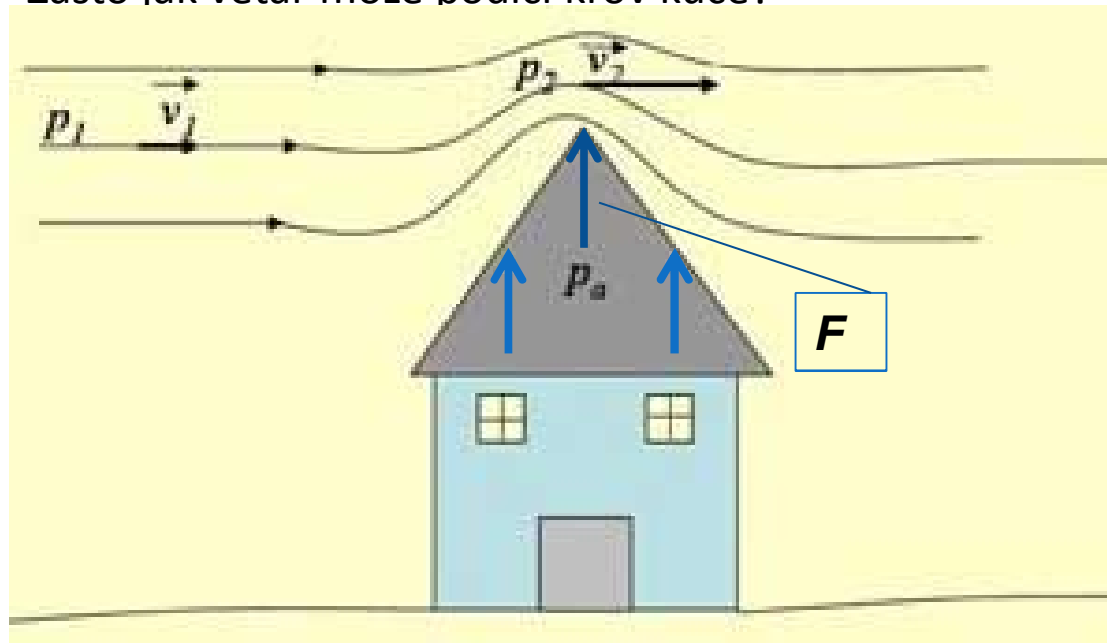
Model avionskog krila

Aerodinamički uzgon –  
posledica razlike pritisaka  
(potrebna je velika brzina  
strujanja tj. kretanja aviona)

Tamo gdje je brzina strujanja veća, pritisak je manji (Bernoullijeva jedn.)

## Strujanje vetra iznad krova

Zašto iak vetar može podići krov kuće?



Kad je iznad krova brzina strujanja vazduha velika,  
Statički pritisak na gornju površinu krova se smanji pa nastaje podpritisak.

Ispod krova je vazduh pod atmosferskim pritiskom, on postaje znatno veći od pritiska sa gornje strane ( $p_0 \gg p$ ) pa sila nastala zbog podpritiska, tj. zbog razlike tih pritiska, deluje odozdo na površinu krova ( $F = \Delta p S$ ) i podigne ga.

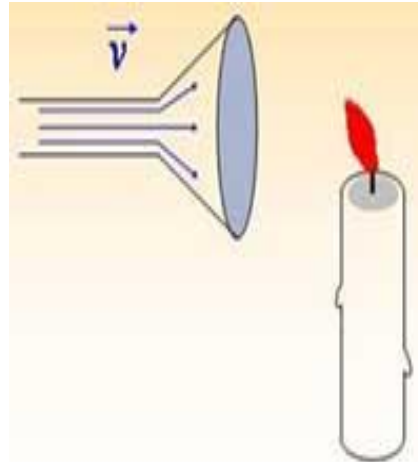


Ako se na zabatu kuće, tj. na trouglastom delu zida na završecima krova ostave otvori, pritisci će se ispod i iznad krova brže izjednačiti pa se krov neće podići.

## Učinci podpritisaka



kašika u mlazu vode se “zalepi” za mlaz umesto da se od njega odmakne



Plamen sveće se primakne, a ne odmakne od izvora duvanja



Duvanjem u kuglicu od salвете na grlu boce ona izleti napolje umesto da uđe u bocu

Tamo gdje je brzina strujanja veća, pritisak je manji.

## Naduvanje kese



Ako vreću, kesu, odmaknemo od usta i duvamo prema njenom otvoru, puno će se lakše i brže naduvati.

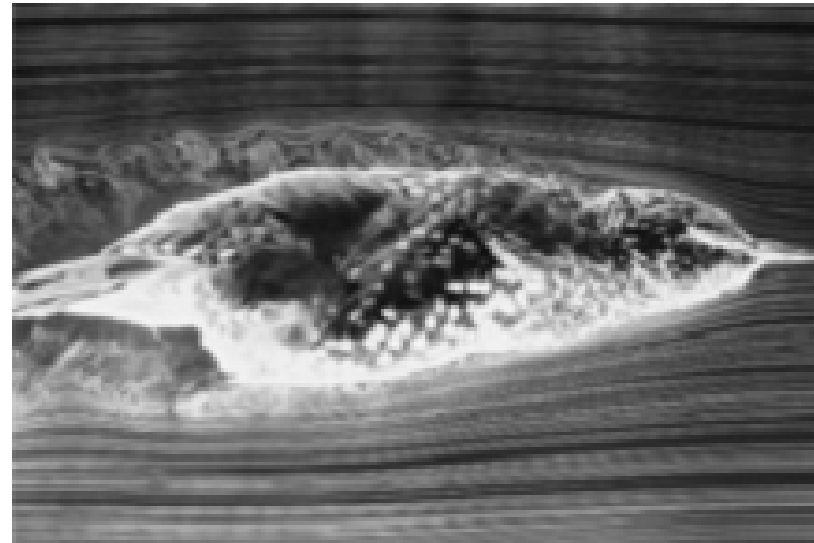
Duvanjem se pritisak vazduha ispred otvora smanji pa atmosferski pritisak „gura“ okolni vazduh u vreću.



# Viskoznost.

Podela fluida:

- idealni fluid - nema unutrašnjeg trenja,
- realni fluid - pri kretanju postoji unutrašnje trenje kao posledica međumolekularnih sila.
- Unutrašnje trenje postoji i pri kretanju čvrstog tela kroz fluid.
- Unutrašnje trenje se manifestuje kao sila viskoznosti koja deluje suprotno kretanju.



# Viskoznost.

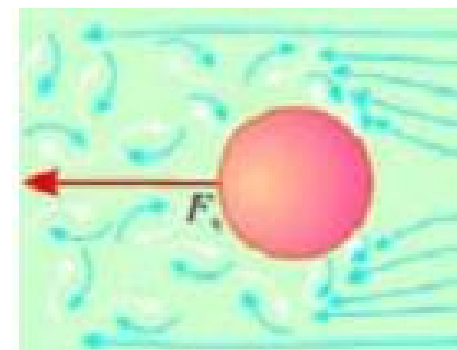
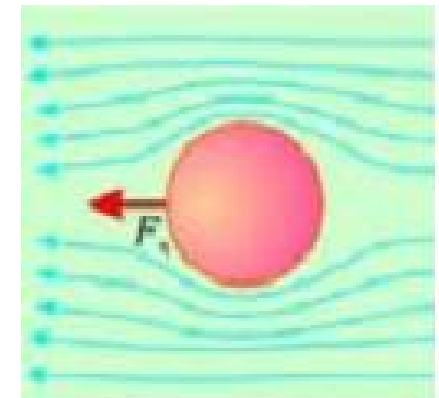
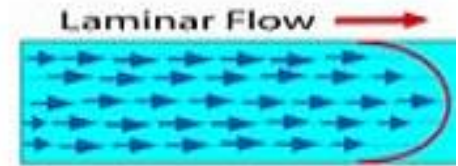
Dve vrste kretanja:

## laminarno kretanje

- fluid se kreće u paralelnim slojevima,
- slojevi fluida se kreću različitim brzinama,
- fluid se brže kreće u sredini a sporije ka zidovima cevi,
- slojevi se ne mešaju.

## turbulentno kretanje

- javlja se pri većim brzinama,
- javlja se zbog prepreka na putu, naglih promena brzina, viskoznosti
- slojevi se mešaju.



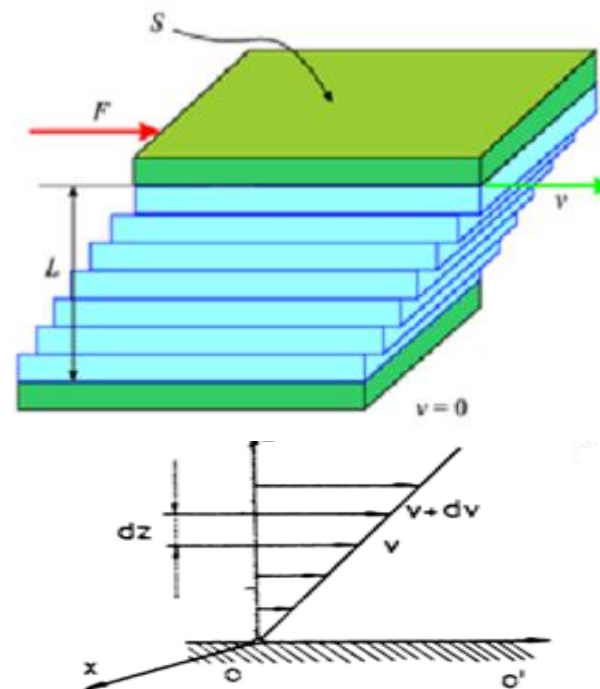
# Viskoznost

- **Viskoznost** je pojava **unutrašnjeg trenja** koje se javlja između slojeva tečnosti pri laminarnom (slojevitom) kretanju.
- Prema Njutnovom zakonu za viskoznost, **sila viskoznog trenja  $F$**  je srazmerna dodirnoj **površini** između slojeva  $S$ , a obrnuto srazmerna **gradijentu brzine  $dv/dz$**  (promena brzine duž pravca normalnog na brzinu kretanja):

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}$$

- $\eta$  - koeficijent **dinamičke** viskoznosti (u [Pas])
- $\nu$  - koeficijent **kinematičke** viskoznosti (u [m<sup>2</sup>/s]).

- Sa porastom temperature viskoznost tečnosti opada, a gasova raste.



$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

# Stoksov zakon- Otpor sredine

*Otpor sredine naziva se sila trenja kojom se neki fluid opire kretanju tela kroz njega.-viskozna sila*

- javlja se kod realnih (viskozni) fluida
- zavisi od oblika (veliĉini) tela, vrsti fluida, brzini kretanja tela

*Sila otpora sredine (unutrašnjeg trenja) proporcionalna je brzini kretanja tela:*

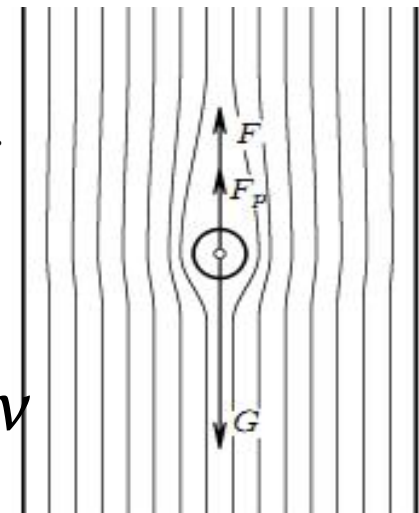
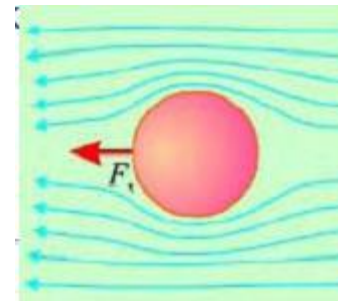
**$F = kv$** ,  $k$  - koeficijent srazmernosti koji zavisi od oblika i dimezija tela koje se kreće i viskoznosti sredine kroz koju se telo kreće.

Za telo sfernog oblika polupreĉnika  $r$ :

$$k = 6\pi\eta r$$

-za kuglu radijusa  $R$  koja se kreće u fluidu brzinom  $v$

**Stoksova formula:  $F_{tr} = 6\pi\eta Rv$**

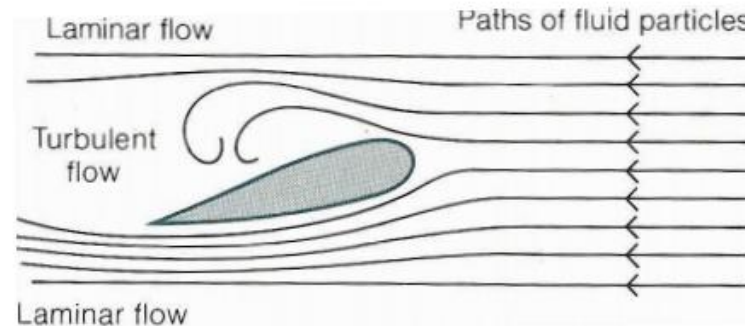
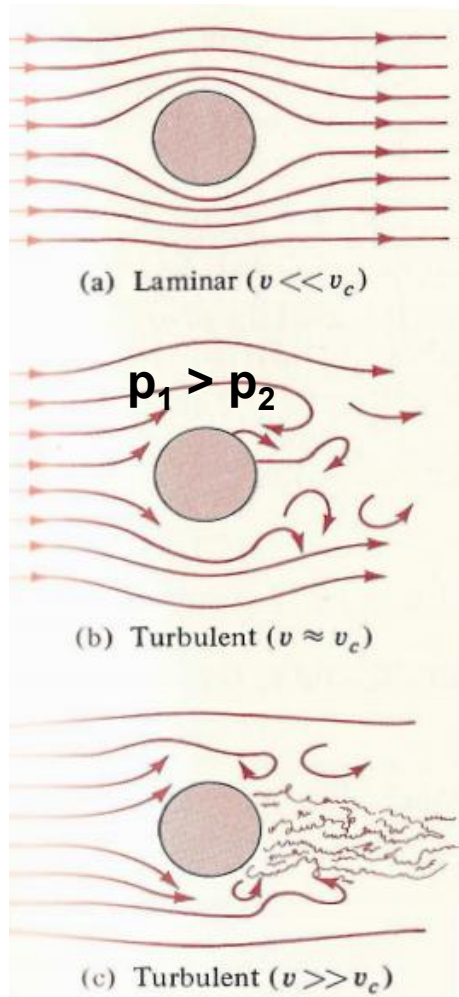


# Laminarno i turbulentno strujanje. -Reynoldsov broj

Reynoldsov broj je bezdimenziona veličina i ključni parametar strujanja viskoznog fluida. Tim brojem se definiše granica između laminarnog i turbulentnog strujanja.

Na njegovu brojnu vrednost utiče više parametara strujanja fluida. Koristi se za dovođenje karakteristika strujanja na uporedive uslove.

Физички смисао Рејнолдсовог броја је однос инерцијалних и вискозних сила флуида.



$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

$Re < Re_k$  – laminarno strujanje  
 $Re > Re_k$  – turbulentno strujanje

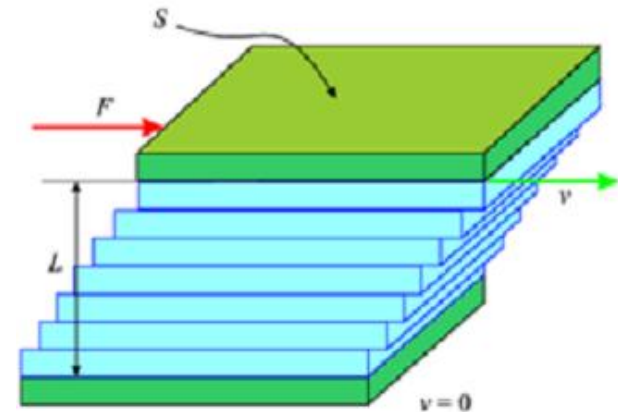


# Viskoznost.

Fluid između dve ploče, nepokretne i pokretne.

- Da bi se gornja ploča pomerila konstantnom brzinom  $v$  potrebno je na nju delovati silom  $F$ .
- U tečnosti se javlja sila trenja ista po intenzitetu ali suprotnog smera.
- Tanki slojevi fluida između ploča se međusobno relativno kreću:
  - sloj koji dodiruje nepokretnu ploču se ne kreće,
  - ostali slojevi imaju brzine od 0 do  $v$ .
- Sila unutrašnjeg trenja:

$$F = \eta S \frac{v}{L}$$



$\eta \left[ \frac{\text{Pa}}{\text{s}} \right]$  - koeficijent unutrašnjeg trenja  
koeficijent viskoznosti